



TITLE:

# The additivity of the clasp singularities

AUTHOR(S):

森元, 勘治

---

CITATION:

森元, 勘治. The additivity of the clasp singularities. 数理解析研究所講究録 1985, 575: 105-116

ISSUE DATE:

1985-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99237>

RIGHT:

## The additivity of the clasp singularities

神大 理 森元勘治 (Kanji Morimoto)

### §0 Introduction

$S^3$  内の tame knot  $k$  に対していろいろな numerical invariants が定義されており、(c.f. [1] [5] [7] [8] [9] [10])、それらの不変量と knots の connected sum との関係を調べることは重要な問題と言えよう。たとえば knot の genus 及び、bridge index  $-1$  は、加法性を持つことが知られている (c.f. [5] [7] [8])。また、最近 [6] において、M. G. Scharlemann により、unknotting number one knots は prime であることが示された。さて、本稿において我々は clasp number の加法性について考察する。clasp number の加法性は一般にはまだ不明であるが、部分的結果として、次の定理を得た。(clasp number  $c(k)$  の定義は後ほど与える)。

定理  $k_1, k_2$  を二つの non-trivial knots とする。このとき、 $c(k_1 * k_2) = 2$  ならば  $c(k_1) = c(k_2) = 1$  である。

ここで、 $k_1 * k_2$  は  $k_1$  と  $k_2$  の connected sum である。

この定理と後述の命題を合わせて、次の系を得る。

系  $k_1, k_2$  を二つの knots とする。このとき、 $c(k_1 * k_2) \leq 2$  ならば  $c(k_1 * k_2) = c(k_1) + c(k_2)$  である。

本稿の議論は P.L. Category で行う。 $cl(\cdot)$ ,  $Int(\cdot)$ ,  $d(\cdot)$  は、それぞれ、closure, interior boundary を示す。集合  $A$  の濃度を  $|A|$  で示す。

## § 1 Intersections of a clasp disk and a 2-sphere

$k$  を  $S^3$  内の tame knot,  $B$  を 2-disk とすれば、以下の如き immersion  $f$  が存在することはよく知られている (c.f. [3] [10] [11])。

$f: B \rightarrow S^3$  s.t.  $f|_{\partial B}: \partial B \rightarrow k$  は同相写像 かつ  $f^{-1}(\tilde{\Sigma})$  の各 component は、 $\partial B$  の点と  $Int B$  の点を結ぶ arc。ここで、 $\tilde{\Sigma} = \{x \in f(B) \mid |f^{-1}(x)| \geq 2\}$ 。

このとき、 $D=f(B)$  を  $k$  の a clasp disk と呼ぶ。

$C_0(k) = |\{\text{components of } \widehat{\Sigma}\}|$  とおき、 $c(k) = \min_0 \{C_0(k)\}$  とおく。 $c(k)$  を  $k$  の the clasp number と呼ぶ。 $c(k)$  の定義から、 $u(k) \leq c(k)$  及び  $g(k) \leq c(k)$  である。ここで  $u(k), g(k)$  は the unknotting number of  $k$  及び the genus of  $k$  である。

$D=f(B)$  を  $C_0(k)=c(k)$  となる  $k$  の clasp disk とする。 $\Sigma=f^{-1}(\widehat{\Sigma})$ ,  $\Sigma=\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_{2c(k)}$  とおく。ここで  $\sigma_i$  は  $\Sigma$  の component である ( $i=1, 2, \dots, 2c(k)$ )。さらに、 $\partial\sigma_i \cap \text{Int} B = \{x_i\}$ ,  $\partial\sigma_i \cap \partial B = \{y_i\}$ ,  $X = \bigcup_{i=1}^{2c(k)} \{x_i\}$  and  $Y = \bigcup_{i=1}^{2c(k)} \{y_i\}$  とおく。

今、 $k$  を non-prime knot とし、 $S$  を  $k$  の non-trivial connected sum を与える 2-sphere とする (以下 connected sum と言えは、非自明なものだけを意味する)。

$S$  と  $D$  は横断的に交わるとしてよいから、 $\widehat{T} = S \cap D$   $T=f^{-1}(\widehat{T})$  とおけば、 $T$  は一本の properly embedded arc in  $B$  といくつかの simple loops in  $\text{Int} B$  からなる。

補題 上の状況において、 $k$  の connected sum を与え、以下の条件 (1)~(3) を満たす 2-sphere が存在する。

(1)  $\alpha$  を  $T$  の subarc で  $\text{Int} \alpha \cap \Sigma = \emptyset$  and  $\partial \alpha \subset \Sigma$  とすれば、 $\partial \alpha$  は  $\Sigma$  の一つの component に含まれない。

(2)  $\alpha$  を  $T$  の subarc で  $\text{Int} \alpha \cap \Sigma = \emptyset$  and  $\partial \alpha = \{P, Q\}$  where  $P \in \partial B$  and  $Q \in \sigma_i \subset \Sigma$  とする。  $\beta$  を  $\sigma_i$  の subarc で、  $\partial \beta = \{Q, x_i\}$  とする。  $B_1, B_2$  を  $\alpha \cup \beta$  によって分離される  $B$  内の二つの disks とする。このとき、  $B_1 \cap (\Sigma - \sigma_i) \neq \emptyset$  and  $B_2 \cap (\Sigma - \sigma_i) \neq \emptyset$  である。

(3)  $\alpha$  を  $T$  の loop component、  $B'$  を  $\alpha$  に bound される  $B$  内の disk とすれば、  $|B' \cap X| \geq 2$  である。

証明

(1)  $\partial \alpha$  が  $\Sigma$  の一つの component  $\sigma_i$  に含まれるとすれば、  $\sigma_i$  の subarc と  $T$  の subarc による二辺形が存在し、 isotopy で交わりをはずすことができる。

(2)  $B_1 \cap (\Sigma - \sigma_i) = \emptyset$  とする。  $B_1 \cap \{x_i\} = \emptyset$  ならば、  $f(B_1)$  に沿った isotopy で交わりをはずすことができる。  $B_1 \cap \{x_i\} \neq \emptyset$  ならば、 (1) における二辺形が存在するか、または、上の disk  $B_1$  と同じ条件 (i.e.  $B_1 \cap \{x_i\} = \emptyset$ ) を満たす disk が存在し、交わりをはずすことができる。

(3)  $\beta$  を  $B'$  内の innermost loop とし、  $B^*$  を  $\beta$  によって張られる disk とする。  $D^* = f(B^*)$  は  $S^3$  内の disk で  $D^* \cap S = \partial D^*$  故、  $E_1, E_2$  を  $\partial D^*$  によって分離される  $S$

内の二つの disks とし、 $S_i = E_i \cup D^*$  ( $i=1,2$ ) とおく。さらに  $B_i$  を  $S_i$  に張られる  $S^3$  内の 3-ball で  $B_1 \cap B_2 = D^*$  を満たすものとする。さて、 $|B^* \cap X| = 0$  のとき、 $B_i \cap k = \emptyset$  としてよい故、 $S_2$  を少し  $B_2$  内に押し込むことにより、交わりをはずすことができる。 $|B^* \cap X| = 1$  のとき、 $D^* \cap k$  は 1 点故  $(B_i, B_i \cap k)$  は 1-string tangle ( $i=1,2$ )。  $S$  は  $k$  の connected sum を与える故、 $(B_i, B_i \cap k)$  は unknotted tangle ではないとしてよい (c.f. [4])。よって  $S_1$  を少し  $B_1$  内に押し込むことにより、交わりをはずすことができる。

## §2 Proof of Theorem

次の命題は 補題から直接に示されるが、[6]の結果、又は genus の加法性からの系でもある。

命題  $c(k) = 1$  ならば  $k$  は prime knot である。

注意。  $c(k) = 1$  であるための必要十分条件は、 $k$  が doubled knot となることである。(c.f. Ch IV of [5])。

さて、定理の証明である。 $k = k_1 * k_2$  とおく。以下の証明

において、記号は §1 と同じ記号  $S, D=f(B), \Sigma, \tilde{\Sigma}, T, \tilde{T}, X, Y$  を使う。また、 $S$  は補題の条件を満たしているものとする。 $m$  を  $T$  の arc component とし、 $B_1, B_2$  を  $m$  によって分離される  $B$  内の二つの disks とする。さらに  $\ell_1 = B_1 \cap \partial B$ ,  $\ell_2 = B_2 \cap \partial B$  とおく。

主張1  $|B_1 \cap X| = |B_2 \cap X| = 2$

補題より  $|B_1 \cap X| \neq 0$  and  $|B_2 \cap X| \neq 0$ 。  $|B_1 \cap X| = 1$  とする。

$B_1 \cap X = \{x_i\}$  and  $f(g_i) = f(g_j)$  とする。補題より  $B_1$  は  $T$  の loop component を含まないから、 $y_j$  と  $x_i$  を結ぶ  $B$  上の arc  $\gamma$  で  $f(\gamma)$  が  $S$  と横断的に 1 点で交わる simple loop となるものが存在し、矛盾。よって主張が示された。

主張2  $T$  は loop component を持たない。

$B_1$  が  $T$  の loop component を含むとする。補題と主張1より outermost loop が存在し、 $n$  とする。 $A$  を  $\partial B_1 \times n$  にはさまれた  $B_1$  内の annulus とし、 $\Sigma' = \{x \in A \mid |q^{-1}(q(x))| \geq 2\}$  とする。ここで  $q = f|_A$  である。しからば、 $q: A \rightarrow S^3$  は immersion で  $q(A) \cap S = q(\partial A) \cap S = q(n \cup m)$  である。さらに  $\Sigma'$  の各 component は  $\partial A$  の異なる components を結ぶ arcs である。ここで、用語を二つ準備する。 $r_1, r_2$  を  $\Sigma'$  の components で  $q(r_1) = q(r_2)$  とする。 $A'$  を  $r_1 \cup r_2$  によって切りとられる  $A$  内の disk で  $A' \cap \ell_1 = \emptyset$  とする。

このとき  $g(A')$  を取りのぞくことにより、新しい immersion  
 $g^*: A^* \rightarrow S^3$  s.t.  $A^*$  is an annulus  $g^*(A^*) \cap S = g^*(\partial(A^* - l^*))$   
 ここで  $l^*$  is a subarc with  $g^*(l^*) = g(l_1)$ 。この操作を、  
 a double curve surgery of type I と呼ぶ。次に、 $r_i, s_i$  を  
 $(i=1,2)$   $\Sigma'$  の components で  $g(r_1)=g(r_2)$ ,  $g(s_1)=g(s_2)$  かつ  
 $r_i \cup s_i$  に切りとられる  $A$  内の disk で  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  かつ  
 $A_i \cap l_1 = \emptyset$  を満たすものが存在するものとする。このとき  
 $g(A_1)$  と  $g(A_2)$  を入れかえることにより、新しい immersion  
 $g^*: A^* \rightarrow S^3$  を得る。この操作を a double curve surgery  
 of type II と呼ぶ。“double curve surgery” という用語につ  
 いては [2] の Ch IV を参照されたい。さて、主張 2 の証明で  
 あるが、type I の surgeries をくり返すことにより、

embedding  $g^*: A^* \rightarrow S^3$  s.t.  $A^*$  is an annulus,  $g^*(A^*) \cap S =$   
 $g^*(\partial(A^* - l^*))$ , where  $l^*$  is a subarc of  $\partial A^*$  with  $g(l^*)$   
 $= g(l_1)$  を得る。このとき、 $g(l_1)$  が isotopy で  $S$  に押し  
 付けられることがすぐわかり矛盾。主張 2 が示された。

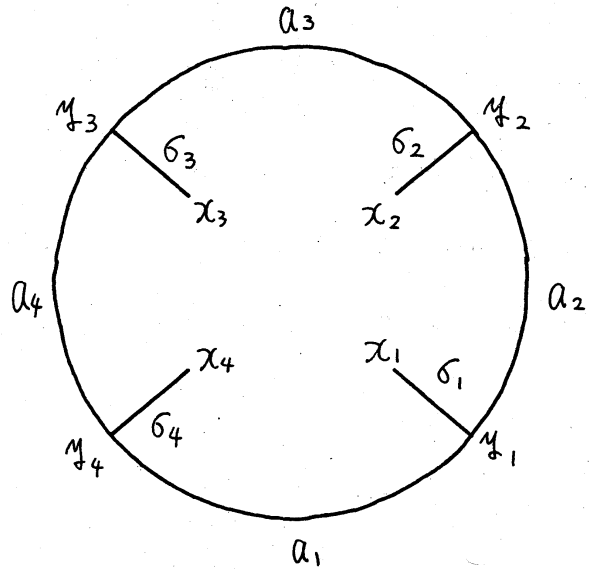
主張 3  $|l_1 \cap Y| = |l_2 \cap Y| = 2$

主張 2 に注意すれば、主張 1 と同様の議論で示される。

さて、 $\Sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4$ ,  $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$  によ、て区切  
 られる  $\partial B$  上の arcs を  $a_1, a_2, a_3, a_4$  とおく。これらの順  
 序は図 1 の通りである。主張 2 より  $T=m$  である。 $\partial m = \{P_0, Q_0\}$

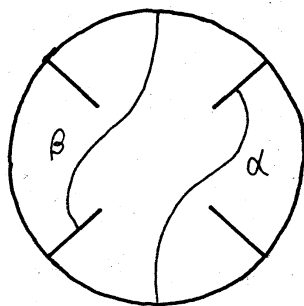


とおく。主張より  $P_0 \in a_1, Q_0 \in a_3$  としてよい。

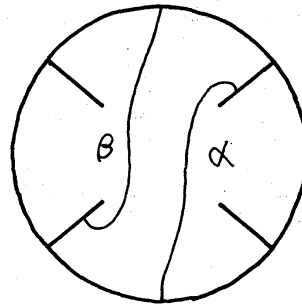


$m \cap \Sigma = \emptyset$  のとき、 $k$  は二つの clasp number one knots の connected sum であり、命題より、knots の prime decomposition の uniqueness から (c.f. [7])  $c(k_1) = c(k_2) = 1$  を得る。

$m \cap \Sigma \neq \emptyset$  とする。 $\alpha, \beta$  を  $m$  の subarcs で  $\text{Int} \alpha \cap \Sigma = \text{Int} \beta \cap \Sigma = \emptyset$ ,  $\partial \alpha = \{P_0, P_1\}$ ,  $\partial \beta = \{Q_0, Q_1\}$ ,  $P_1 \in \Sigma$ ,  $Q_1 \in \Sigma$  とする。しからば、 $P_1 \in \sigma_2, Q_1 \in \sigma_4$  としてよい。 $\alpha, \beta$  に関して、図2の三つの場合がある。



Case A



Case B

図2

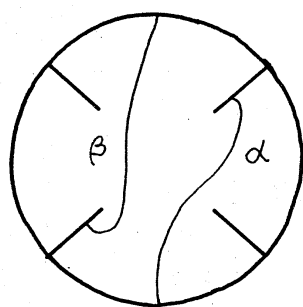


図 2

Case C

Case C のとき。  $|m \cap \sigma_4| > |m \cap \sigma_i|$  ( $i=1,2,3$ ) となり矛盾。

よって Case C は起らない。

Case A のとき。  $|m \cap \sigma_2| > |m \cap \sigma_1|$ ,  $|m \cap \sigma_4| > |m \cap \sigma_3|$  より  $f(\sigma_1) = f(\sigma_3)$ ,  $f(\sigma_2) = f(\sigma_4)$  である。故に  $|m \cap \sigma_i|$  is odd ( $i=1,2,3,4$ ) である。  $l$  を  $\partial B$  の subarc として  $\partial l = \partial m$  かつ  $\{y_1, y_2\} \subset l$  とし、  $B'$  を  $l \cup m$  によって張られる  $B$  内の disk とする。  $|m \cap \sigma_i|$  is odd より  $B' \cap X = \{x_3, x_4\}$  である。  $\Sigma' = \Sigma \cap B'$  とおき、  $i=1,2$  に対して、  $\mu_i$  を  $\Sigma'$  の component として、  $\sigma_i$  の subarc かつ  $\mu_i \cap l \neq \emptyset$  とする。 また、  $\nu_i$  を  $\Sigma'$  の component として、  $\nu_i \cap X \neq \emptyset$  かつ、  $\nu_1$  ( $\nu_2$ ) は、  $\mu_1$  ( $\mu_2$ ) によって分離される  $B'$  内の disk として  $\mu_2$  ( $\mu_1$ ) を含まないものに含まれるとする。  $s_1, \dots, s_p$ ,  $r_1, \dots, r_q$  を図 3 の如き  $\Sigma'$  の components とする。

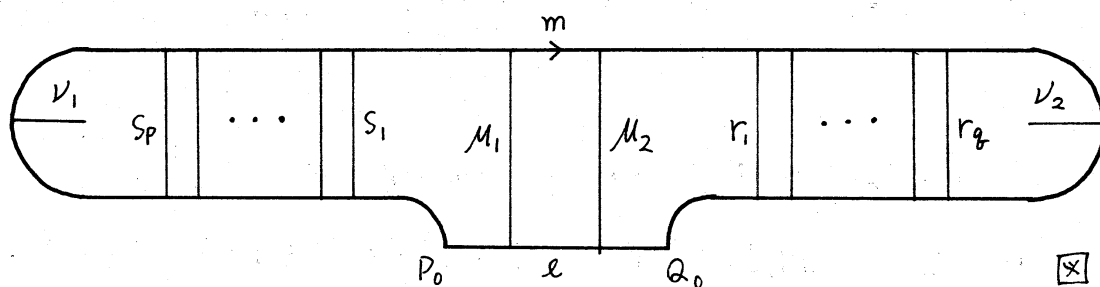


図 3

$m$  に  $P_0$  を始点  $Q_0$  を終点とする向きを入れ、 $m \cap \Sigma' = \{z_1, z_2, \dots, z_{2(p+q+2)}\}$  とおく。ここで  $z_i$  は  $m$  の向きに沿った  $m \cap \Sigma'$  の  $i$ -番目の点である。このとき図2から、 $z_i \in \sigma_4$  ならば  $i$  is even。  $z_i \in \sigma_3$  ならば  $i$  is odd。である。 $g = f|_{B'}$  とおく。以下で double curve surgeries を用いて  $g$  の singularities を取り除いて行くが、新しい immersion に対しても同じ記号  $g$  と  $B'$  を用いる。

Case A-1  $g(\mu_1) = g(\nu_1)$  のとき。

$\nu_1 \subset \sigma_3$  故  $z_{p+1} \in \sigma_3$  即ち  $p$  is even。まず、type I の surgeries を用いて  $g(s_i) \neq g(s_j)$  ( $1 \leq i < j \leq p$ ),  $g(r_i) \neq g(r_j)$  ( $1 \leq i < j \leq q$ ) とできる。このとき  $p = q$  である。しからば  $S$  上の loops に注意して、type II の surgeries を用いて  $p = q = 0$  にできる。(1回の surgeries で減少する singularities の数は偶数であることに注意せよ)。

Case A-2  $g(\mu_1) = g(\nu_2)$  のとき。

$\nu_1 \subset \sigma_4$  故  $z_{p+1} \in \sigma_4$  即ち  $p$  is odd。よって Case A-1 の議論を用いて  $p = q = 1$   $g(\mu_1) = g(\nu_2)$  となる。よってもう一度 surgery を行って、 $p = q = 0$ ,  $g(\mu_1) = g(\nu_2)$  を得る。

さて、我々は以上で、immersion  $g: B' \rightarrow S^3$  s.t.

$$\partial B' = m \cup \ell, \quad g(\ell) = f(\ell), \quad g(B') \cap S = g(m), \quad p = q = 0$$

and  $g(M_i) = g(V_i)$  ( $i=1,2$ ) を得た。

この immersion に注目すれば、 $S$  が  $k$  の connected sum を与えないことがわかる。故に Case A は生じない。

全く同様の議論を用いて Case B は生じないことがわかる。

これで定理は証明された。

## References

- [1] R.H.Fox : A quick trip through knot theory , Topology of 3-manifolds and related topics , Prentice - Hall , Englewood Clifts , N.J. , 1962 , 120 - 167.
- [2] J.Hempel : 3-manifolds , Ann. of Math. Studies 86 Princeton N.J. Princeton University Press 1976.
- [3] Y.Nakagawa : Elementary disks and their equivalences , Quart. J. Math. Oxford (2) , 27 (1976) , 355 - 369.
- [4] Y.Nakanishi : Primeness of links , Math. Sem. Notes Kobe University , 9 (1981) , 415 - 440.
- [5] D.Rolfsen : Knots and links , Mathematics Lecture Series 7 , Publish or Perish Inc. , Berkeley , Ca. 1976.
- [6] M.G.Scharlemann : Unknotting number one knots are prime , Preprint.
- [7] H.Schubert : Die eindeutige zerlegbarkeit eines knotens in primknoten , Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg , math - nat. Kl. , 3. Abh. (1949).
- [8] H.Schubert : Über eine numerish knoteninvariante , Math. Zeitschr. Bd. 61 , S. 245 - 288 (1954).
- [9] H.Seifert : Über das Geschlecht von knoten , Math. Ann. 110 (1935) , 571 - 592.
- [10] T.Shibuya : Some relations among various numerical invariants for links , Osaka J. Math. 11 (1974) 315 - 322.
- [11] N.Smythe : Handlebodies in 3-manifolds , Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970) . 534 - 538.